

- a. DSB - NO
- b. 8-PSK - SI**
- c. 16-QAM - NO
- d. ASK binaria unipolare - NO

11) Una trasmissione PSK binaria avviene su un canale AWGN con densità spettrale di potenza del rumore $S_{nn}(f) = 7E-12$ W/Hz, alla velocità di 114 kbit/s. La portante, a $f_c = 64$ MHz, ha una potenza media ricevuta pari a $8.4 \mu\text{W}$. Determinare la probabilità d'errore [se necessario, usare l'approssimazione $Q(y) \approx (1/(y\sqrt{2\pi})) \exp(-y^2/2)$]. (3 punti)

La prestazione delle PSK binarie vale $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

D'altronde $E_b = P \times T_b = \frac{P}{r_b} = \frac{8.4E-6}{114E3} = 7.368E-11$ J

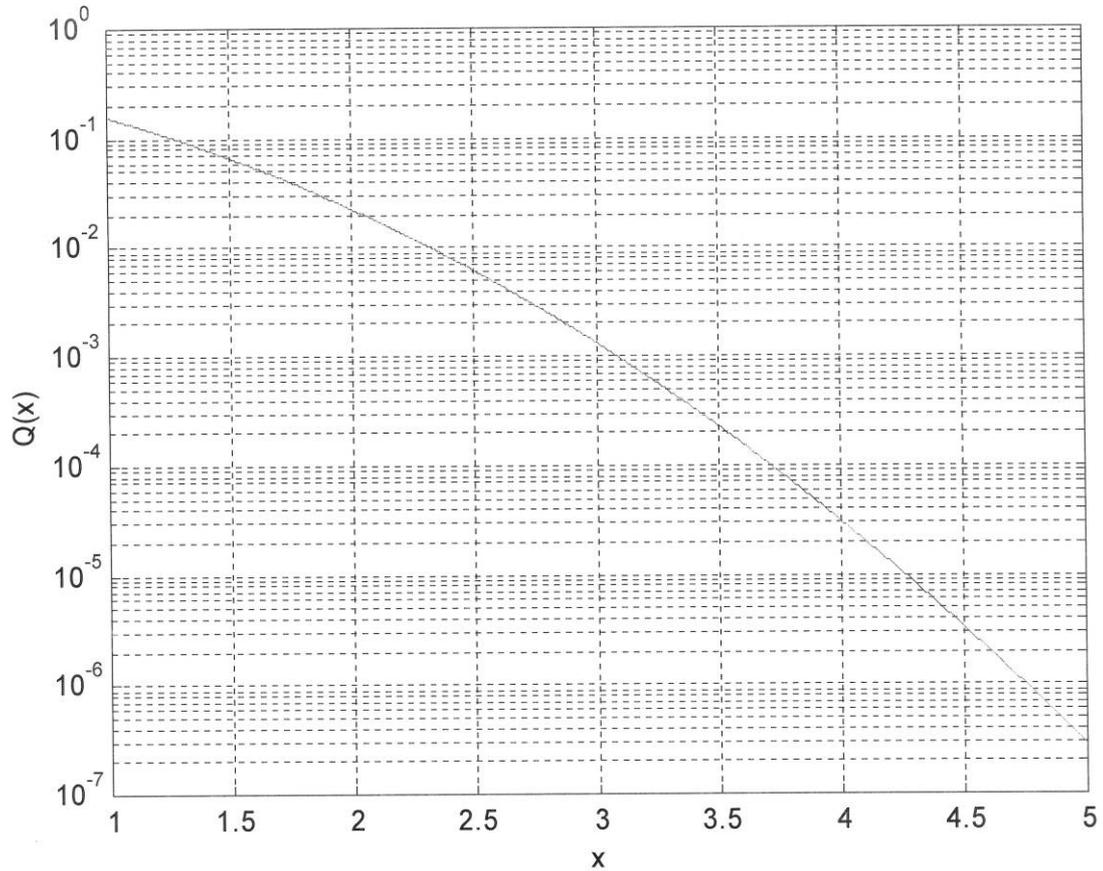
Inoltre $S_{nn}(f) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow N_0 = 2 \times S_{nn}(f) = 2 \times 7E-12 = 14E-12$ J

Dunque $\frac{2E_b}{N_0} = \frac{2 \times 7.368E-11}{14E-12} = 10.52$ e $\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 3.24$

Perciò $P_e \approx Q(3.24) = \frac{1}{3.24\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(3.24)^2}{2}} = \frac{1}{8.12} e^{-5.2488} = 6.47 \times 10^{-4}$

3) Un sistema di trasmissione digitale utilizza la modulazione QPSK, con codifica Gray, per trasmettere i propri dati, alla velocità di 36 kbps ed alla frequenza di 2.4 GHz

- a. Il sistema deve compiere non più di 3 errori ogni secondo di trasmissione. Determinare lo spettro bilatero di densità spettrale di potenza del rumore termico (AWG) al ricevitore, affinché questo si verifichi, quando la potenza del segnale ricevuto è di 0.001 mW (giustificare opportunamente le formule utilizzate)
- b. Determinare l'occupazione in banda e l'efficienza spettrale del sistema, se in trasmissione si utilizza un filtro a coseno rialzato con $\beta=0.22$



Da [MODULAZIONI N-ARIE I. Pdf], pag. 5, si determina come la probabilità d'errore in AWGN per la QPSK sia pari a

$$P_e = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

D'altronde, in caso di codifica Gray, esse si dimezza e diventa come quella della PSK $\Rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$

La prob. d'errore richiesta è $P_e = \frac{3 \text{ errori}}{36000 \text{ bit}} = 8,33 \times 10^{-5}$.

Dunque si ha

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q(x) = 8,33 \times 10^{-5} \Rightarrow x = Q^{-1}(P_e) = Q^{-1}(8,33 \times 10^{-5}) \approx 3,75$$

come si evince dal grafico fornito.

Ora si ha $\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = x$; $\frac{2E_b}{N_0} = x^2$; $N_0 = \frac{2E_b}{x^2}$;

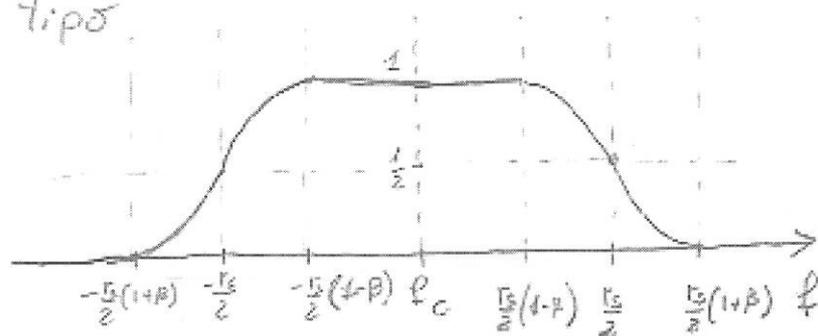
Ma $E_b = \frac{E_s}{2} = \frac{1}{2} \cdot P_s \cdot T_s = \frac{P_s}{2} \cdot T_b = \frac{P_s}{f_b}$ e dunque

$$N_0 = \frac{2P_s}{x^2 f_b} \Rightarrow N_0 = \frac{2 \times 1E-6}{(3,75)^2 \times 36000} = 3,95 \times 10^{-12} \text{ [W/Hz]}$$

Ma si ricordi che

$$P_m(f) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \underline{P_m(f) = 1,98 \times 10^{-12} \text{ W/Hz}}$$

Visto lo schema a coseno modulato, lo spettro del segnale è del tipo



e dunque la banda è semplicemente

$$B_T = \frac{f_s}{2}(1+\beta) \times 2 = f_s(1+\beta) = \frac{f_b}{2}(1+\beta) =$$

$$= 18000 \times 1,22 = \underline{21,96 \text{ KHz}}$$

P.S.: a scopo informativo, la banda di rumore sarebbe invece

$$B_N = \frac{f_s}{2} \times 2 = f_s = \frac{f_b}{2} = 18 \text{ KHz}, \text{ per cui } P_m = P_m(f) \times 2B_N = 11,28 \text{ mW}$$

$$\alpha \left(\frac{S}{N}\right) = \frac{1E-6}{21,96E-9} = 14,03 \Rightarrow 11,47 \text{ dB}$$

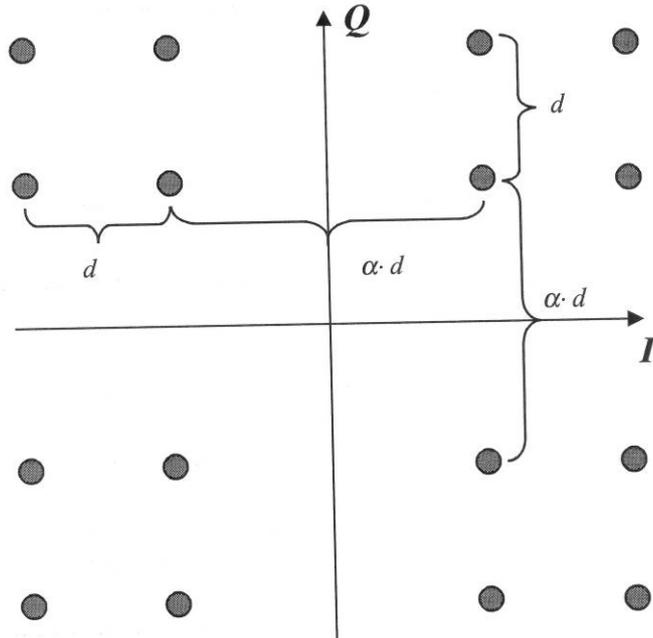
EFF. SPETTRALE

$$\eta = \frac{f_b}{B_T} = \frac{f_b \cdot 2}{f_b(1+\beta)} =$$

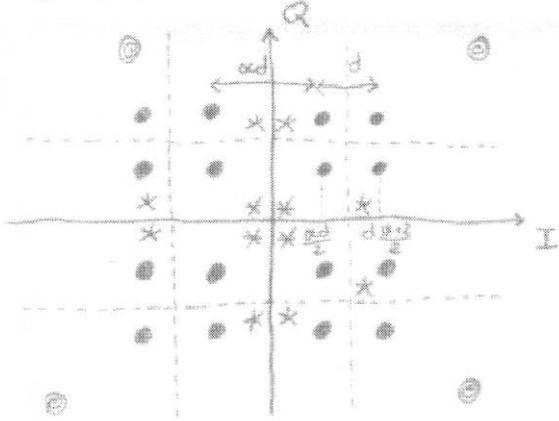
$$= \frac{2}{1+\beta} = \frac{2}{1,22} =$$

$$= 1,639 \left[\frac{\text{bps}}{\text{MHz}} \right]$$

- 3) Si definiscano le proprietà generali delle modulazioni digitali M-QAM. Con riferimento alla costellazione data in figura (usata nel sistema televisivo digitale terrestre DVB-T)
- si definisca il valore di M , una possibile codifica Gray per i simboli M-ari, la energia media del simbolo trasmesso e del bit trasmesso
 - si determinino e disegnino le regioni di decisione per una corretta ricezione e si calcoli la probabilità d'errore di simbolo (si eliminino non appena possibile i termini del tipo $Q^2(\cdot)$)
 - (Facoltativo: si valuti la penalizzazione in potenza necessaria per ottenere la stessa probabilità d'errore, quando si utilizza un valore di $\alpha = 2$ o di $\alpha = 4$, invece che $\alpha = 1$)



Trasmissione di costellazione 16-QAM NON UNIFORME. $\Rightarrow M=16=2^4$



$$E_s = \frac{1}{16} \left(\frac{\alpha^2 d^2}{4} + \frac{\alpha^2 d^2}{4} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{\alpha^2 d^2}{4} + \frac{d^2(\alpha+2)^2}{4} \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\frac{d^2(\alpha+2)^2}{4} + \frac{d^2(\alpha+2)^2}{4} \right) = \frac{1}{4} \frac{\alpha^2 d^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 d^2 + d^2(\alpha+2)^2}{4} +$$

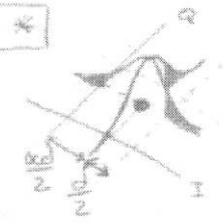
$$+ \frac{1}{4} \frac{d^2(\alpha+2)^2}{2} = \frac{\alpha^2 d^2 + \alpha^2 d^2 + d^2(\alpha+2)^2 + d^2(\alpha+2)^2}{4} =$$

$$= \frac{\alpha^2 d^2 + d^2(\alpha+2)^2}{4} = \frac{d^2}{4} (\alpha^2 + \alpha^2 + 4\alpha + 4) = \frac{d^2(2\alpha^2 + 4\alpha + 4)}{4}$$

$$= \frac{d^2}{2} (\alpha^2 + 2\alpha + 2); \quad E_b = \frac{E_s}{4} = \frac{d^2}{8} (\alpha^2 + 2\alpha + 2)$$

Rumore gaussiano con $\sigma_{n_i}^2 = \sigma_{n_q}^2 = N_0/2$, i.i.d. (indipendenti, identicamente distribuiti)

Regio *



$$P(C/*)P(*) = \frac{1}{16} P[-\frac{\alpha d}{2} \leq m_i \leq \frac{d}{2}] P[-\frac{d}{2} \leq m_q \leq \frac{d}{2}] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\int_{-\frac{\alpha d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{N_0/2}} e^{-\frac{m^2}{N_0/2}} dm \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\int_0^{\frac{d}{2}} \dots + \int_0^{\frac{\alpha d}{2}} \dots \right]^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \dots + \frac{1}{2} \int_{\frac{\alpha d}{2}}^{\infty} \dots \right]^2$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 - \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_0/2}} e^{-\frac{x^2}{N_0/2}} dx - \int_{\frac{\alpha d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_0/2}} e^{-\frac{x^2}{N_0/2}} dx \right]^2 = \frac{1}{4} \left[1 - Q\left(\frac{d}{2} \sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) - Q\left(\frac{\alpha d}{2} \sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) - Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 d^2}{2N_0}}\right) \right]^2 = \frac{1}{4} \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) - 2Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 d^2}{2N_0}}\right) \right]$$

Regio @

$$P(C/@)P(@) = \frac{1}{16} P[-\frac{d}{2} \leq m_i \leq \frac{d}{2}] P[-\frac{d}{2} \leq m_q \leq \frac{d}{2}] = \frac{1}{4} \left[\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{N_0/2}} e^{-\frac{m^2}{N_0/2}} dm \right]^2 = \frac{1}{4} \left[1 - \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \dots \right]^2$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) \right]^2 \approx \frac{1}{4} \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) \right]$$

Regio *

$$P(C/*)P(*) = \frac{8}{16} P[-\frac{\alpha d}{2} \leq m_i \leq \frac{d}{2}] P[-\frac{d}{2} \leq m_q \leq \frac{d}{2}] = \frac{1}{2} \left[\int_{-\frac{\alpha d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{N_0/2}} e^{-\frac{m^2}{N_0/2}} dm \right] \left[\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{N_0/2}} e^{-\frac{m^2}{N_0/2}} dm \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) - Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 d^2}{2N_0}}\right) \right] \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) \right] \approx \frac{1}{2} \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) - Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 d^2}{2N_0}}\right) \right]$$

Probabilità di ricevere correttamente un simbolo: $P_c = P(*)P(C/*) + P(@)P(C/@) + P(*)P(C/*)$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) - \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 d^2}{2N_0}}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) + \frac{1}{2} - Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) - \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 d^2}{2N_0}}\right) =$$

$$= 1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) - Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 d^2}{2N_0}}\right) \Rightarrow P_{e,s} = 1 - P_c = 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 d^2}{2N_0}}\right)$$

N.B.: se $\alpha=1$ e $d=2d$, si ottiene la prestazione nota delle 16-QAM! OK

$$\alpha=1 \Rightarrow P_{e,s} = 3Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right); \quad \alpha=2 \Rightarrow P_{e,s} = 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right);$$

$$\alpha=4 \Rightarrow P_{e,s} = 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{8d^2}{N_0}}\right)$$

Bisogna trovare $d' = f(d'')$ tale da $P_{e,s}' = P_{e,s}'' \Rightarrow \alpha d d'$, poiché i d' e d'' stanno all'interno della funzione $Q(\cdot)$!

Possiamo solo dire che (approssimativamente), se continuiamo solo la prima funzione in $Q(\cdot)$, si hanno le differenze di potenza a lato

$$E_s' = \frac{5}{2} d^2; \quad E_s'' = 5d^2; \quad E_s''' = 13d^2$$

3 dB 7.2 dB